

О. Б. Бутусов, В. В. Дикусар, Н. И. Редикульцева

## НЕЧЕТКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

O. B. Butusov, V. V. Dikusar, N. I. Redikul'tseva

### FUZZY DIFFERENTIAL MODELS AND THEIR APPLICATION FOR MATHEMATICAL MODELING OF COMPLEX ECOLOGICAL SYSTEMS

**Аннотация.** Для математического моделирования сложных экологических систем и процессов предложена классическая модель Ферхюльста, в которой использованы следующие модификации: 1) сложные процессы деградации лесной экосистемы под воздействием промышленных выбросов предложено моделировать с помощью положительных и отрицательных потоков биомассы; 2) влияние неизвестных или мало известных параметров предложено моделировать с помощью нечетких чисел (нечеткие начальные условия и нечеткие виртуальные потоки биомассы); 3) в качестве единицы времени для описания процессов деградации лесов в северных широтах предложено использовать не месяцы, а вегетационные периоды. В результате математического моделирования установлено наличие порога токсического воздействия, вблизи которого изменяется характер динамических процессов: эволюционные процессы переходят в катастрофические. Для компьютерного моделирования предложены три модели. Первая моделирует виртуальную нечеткую динамику с помощью четкого моделирования отдельно верхней и отдельно нижней границ виртуального интервала нечеткости (модель обозначена как «ОА» (Ordinary Arithmetic)). Вторая моделирует нечеткую динамику с помощью правосторонней производной (модель обозначена как «IA1» (Interval Arithmetic-1)). Третья моделирует нечеткую динамику с помощью левосторонней производной (модель обозначена как «IA2» (Interval Arithmetic-2)). Модель «ОА» хорошо описывает асимптотическую динамику процессов в деревьях, однако границы интервала могут сходиться к разным пределам. Модель «IA1» не имеет асимптот и границы интервалов расходятся, в результате чего ширина интервалов неопределенности катастрофически возрастает. Модель «IA2» имеет асимптоты, ширина интервала достаточно быстро приближается к стационарному пределу, после которого сохраняет постоянную ширину.

**Ключевые слова:** нечеткая производная, нечеткие дифференциальные уравнения, модифицированное

**Abstract.** For mathematical modeling of complex ecological systems and processes, the classical Verhulst model is proposed with the following modifications: 1) it was proposed to model complex processes of forest ecosystem degradation under the influence of industrial emissions using positive and negative virtual biomass flows; 2) it was proposed to model the influence of unknown or little-known parameters using fuzzy numbers (fuzzy initial conditions and fuzzy virtual biomass flows); 3) it was proposed to use vegetation periods rather than months, as a unit of time for mathematical modelling of forest degradation in northern latitudes. Mathematical modeling shows the presence of a threshold in polluted ecosystem dynamics, near which evolutionary processes change to catastrophic ones. For computer simulation, three models are proposed. The first model of virtual fuzzy dynamics modeling using the separately upper and separately lower boundaries of the virtual fuzziness interval (the model is designated as "OA" (Ordinary Arithmetic)). The second model of fuzzy dynamics using a right-hand derivative (the model is designated as "IA1" (Interval Arithmetic-1)). The third model of fuzzy dynamics with using the left-side derivative (the model is designated as "IA2" (Interval Arithmetic-2)). The "OA" model shows asymptotic dynamics. However, fuzziness boundaries can converge to different limits. The "IA1" model has no asymptotes and the fuzziness interval catastrophically diverge. The "IA2" model has asymptotes, the fuzziness interval quickly approaches the stationary limit and after that remains constant.

**Keywords:** fuzzy derivative, fuzzy differential equations, modified Verhulst equation, virtual negative biomass

уравнение Ферхюльста, виртуальный отрицательный поток биомассы, интервальная арифметика, качество природной среды, экологический мониторинг.

flow, interval arithmetic, environmental systems quality, environmental monitoring.

## Введение

Воздействие атмосферных промышленных загрязнений на лесные экосистемы проявляется различным образом в зависимости от величины концентрации промышленных загрязнений в атмосферном воздухе. В книге Вильяма Смита [1] взаимодействие атмосферных загрязнений и лесных экосистем разделяется на три класса: слабое взаимодействие при малых концентрациях промышленных загрязнителей, при котором лесные массивы выступают в роли эффективного очистителя атмосферы от загрязнителей; средний уровень воздействия загрязнений на леса, при котором происходят физиологические нарушения, имеющие физиономический характер, и уменьшение таких важных показателей экологического состояния лесов, как биомасса, проективное покрытие, видовое разнообразие и прочее, при этом в результате ослабления защитных функций возможны заболевания отдельных групп деревьев и инвазия насекомых вредителей; высокий уровень характеризуется заболеванием и смертностью деревьев, в результате чего происходит изреживание древостоя и обезлесивание территорий.

Аналогичная классификация уровней воздействия промышленных загрязнений на лесные массивы, но по территориальному признаку использовалась в работах [2–7]. В этих работах рассматривались результаты воздействия на лесные массивы газовых и аэрозольных выбросов металлургических комбинатов. Лесные массивы, расположенные на больших расстояниях от комбината, получали дозу химического загрязнения ниже порога токсического воздействия, что в классификации Вильяма Смита соответствует первому классу. В классификации [2–7] эти лесные массивы называют фоновой территорией или зоной. Лесные массивы, расположенные на расстояниях от комбината, для которых уровень воздействия атмосферного загрязнения выше порога токсического воздействия, получили в работах [2–7] название буферных, а территория, на которой они расположены, – буферной территории или зоны. Леса, расположенные на небольших расстояниях от комбината и подверженные наиболее сильному воздействию атмосферного загрязнения, относятся к лесам третьего класса, и в работах [2–7] территория, на которой расположены эти лесные массивы, получила название импактной территории или импактной зоны.

В качестве интегрального показателя антропогенного воздействия на леса можно также использовать количество лесной биомассы, которое уменьшается под воздействием антропогенных факторов [8]. В работе [9] приведена следующая эмпирическая формула для оценки антропогенных изменений лесной биомассы

$$\frac{dB_i}{dt} = G_i B_i M_i \left( 1 - \frac{B_i}{M_i} \right) - E_i, \quad (1)$$

где  $i$  – номер пробной площади;  $B_i$  – плотность лесной биомассы ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-2}$ );  $t$  – время ( $\text{месяц}^{-1}$ );  $G_i$  – коэффициент прироста биомассы ( $\text{кг}^{-1}\cdot\text{м}^2\cdot\text{месяц}^{-1}$ ), оцененный по спутниковым данным;  $M_i$  – плотность биомассы при нулевом потоке ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-2}$ );  $E_i$  – отрицательный поток биомассы ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{месяц}^{-1}$ ).

В работе [9] отрицательный поток биомассы – это количество биомассы, изымаемое из лесного массива в единицу времени на нужды отопления. Отметим, что поток биомассы может иметь виртуальный характер. Так, уменьшение биомассы под воздействием выбросов промышленных предприятий можно трактовать как отрицательный поток. Увеличение биомассы также может быть описано с помощью виртуальных положительных потоков, например, увеличение биомассы, связанное с восстановлением и реабилитацией лесов, происходящее вследствие очистки газовых выбросов промышленных предприятий.

Авторы работы [9] в качестве единицы измерения времени использовали один месяц, что вполне оправдано для южных широт. В северных широтах для измерения времени лучше использовать другую единицу, например, в наших расчетах использован вегетационный период (ВП). Это обусловлено тем, что реальное уменьшение биомассы за счет газовых выбросов промышленных предприятий может происходить только в течение вегетационного периода.

Модель (1) является трехпараметрической моделью и относится к классу моделей Ферхюльста [10]. В безразмерной форме модель имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{db}{d\tau} = b(1-b) - e, \\ b(0) = b_0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $b = \frac{B}{M}$  – безразмерная плотность биомассы;  $M$  – предельная плотность биомассы при нулевом потоке ( $\text{кг} \cdot \text{м}^{-2}$ );  $g = GM$  – удельный коэффициент прироста биомассы ( $\text{ВП}^{-1}$ );  $\tau = gt$  – безразмерное время;  $T$  – время релаксации динамической системы ( $\text{ВП}$ );  $T_g = gT$  – безразмерное время релаксации динамической системы;  $\tau_n = \frac{\tau}{T_g} = \frac{t}{T}$  – безразмерное нормализованное время;  $e = \frac{E}{Mg}$  – безразмерный отрицательный поток биомассы;  $b_0$  – начальная безразмерная плотность биомассы.

Для постоянных потоков биомассы модель (2) имеет аналитическое решение:

$$b(\tau) = \begin{cases} \frac{a_1 - Pa_2}{1 - P}, & e \leq 0,25, \\ \frac{b_0 + ke - kb_0 / 2}{1 - k(b_0 - 0,5)}, & e > 0,25, \\ \frac{b_0 + 0,5\tau(b_0 - 0,5)}{1 + \tau(b_0 - 0,5)}, & e = 0,25, \end{cases} \quad (3)$$

где  $a_1 = 0,5 + \sqrt{0,25 - e}$ ,  $a_2 = 0,5 - \sqrt{0,25 - e}$ ,  $P = \frac{b_0 - a_1}{b_0 - a_2} \exp(-(a_1 - a_2)\tau)$ ,  $k = -\frac{1}{r} \text{tg}(r\tau)$ ,  $r = \sqrt{e - 0,25}$ .

Учитывая, что для имеющих физический смысл аргументов тангенса необходимо выполнение условия  $0 < r\tau < \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ , получаем ограничения, наложенные на время решения задачи  $\tau < \frac{1,57}{r} = \frac{1,57}{\sqrt{e - 0,25}}$ . Например, для  $e = -0,3$  время решения задачи составляет 7,02 безразмерных шагов, а для  $e = 0,5 - 3,14$ .

Вместо аналитических формул (3) можно использовать численные алгоритмы, например, алгоритм Рунге – Кутта. Ниже приведен один из вариантов алгоритма Рунге – Кутта второго порядка:

$$b_{i+1} = b_i + \frac{d\tau}{2} (f(b_i) + f(b_i + d\tau \cdot f(b_i))), \quad (4)$$

где  $f(b) = b(1-b) - e$ .

Следует учитывать, что при  $e > 0,25$ , т.е. при больших отрицательных потоках биомасса достаточно быстро уменьшается до нуля и далее становится отрицательной. Поэтому для получения решений, имеющих физический смысл, следует использовать только варианты  $e < 0,25$ , т.е. рассматривать случаи небольших отрицательных потоков или положительных потоков. Неподвижные точки модели находятся из условия:  $b^2 - b + e = 0$  и равны  $a_{1,2}$ . Неподвижные точки являются аттракторами, в которые сходятся динамические траектории, выходящие из различных начальных условий.

Модель (2) представляет собой однопараметрическое уравнение, в котором имеется единственный параметр (поток биомассы). В силу неопределенности величины потока будем рассматривать поток как нечеткое число (НЧ). При этом безразмерная биомасса также становится нечетким числом. Безразмерная биомасса должна быть положительным НЧ, в то время как поток биомассы может быть как положительным, так и отрицательным НЧ. Следует отметить, что возможно также

введение в теорию понятия отрицательной биомассы, с помощью которой можно описывать, например, деградацию почвенного покрова. Однако в данной работе рассмотрена только классическая положительная биомасса. Рассмотрим модель (2) в приближении нечетких чисел.

### Методика

Обозначим безразмерное время  $\tau \rightarrow t$ . Тогда нечеткий вариант модели (2) с отрицательным потоком биомассы примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{b}}{dt} = \tilde{b}(1 - \tilde{b}) - \tilde{e}, \\ b(0) = \tilde{b}_0, \end{cases} \quad (5)$$

где знак  $\sim$  – «тильда» используется для обозначения НЧ.

Для численного моделирования будем рассматривать приближение положительных треугольных нечетких чисел (ТНЧ). На рис. 1 представлено ТНЧ с функцией принадлежности (ФП) в форме треугольника.

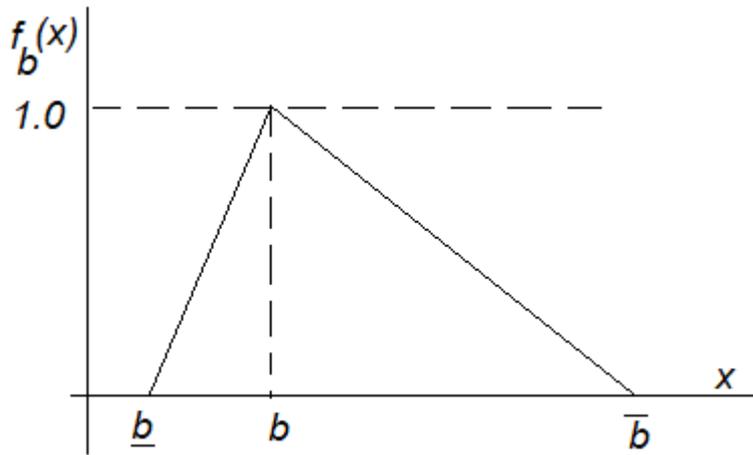


Рис. 1. Нечеткое треугольное число:  $\underline{b}, \overline{b}$  – левая и правая границы НЧ;  $b$  – центр НЧ;  $f_b(x)$  – функция принадлежности НЧ

Для моделирования будем использовать метод  $\alpha$ -сечений ФП [11–15]. На рис. 2 представлено одно из  $\alpha$ -сечений, которые проводятся на высоте  $\alpha$ .

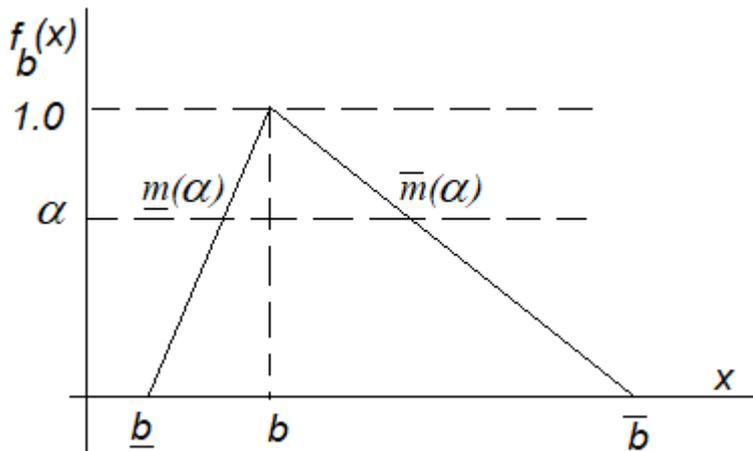


Рис. 2. Графическое представление  $\alpha$ -сечения:  $[\underline{m}(\alpha), \overline{m}(\alpha)]$  – четкий интервал  $\alpha$ -сечения

При этом  $\alpha$ -сечение представляет собой четкий интервал, в котором находятся точки  $x$ , для которых  $f_b(x) > \alpha$ . Таким образом, от нечетких чисел можно перейти к четким интервалам и решать интервальные уравнения вместо нечетких [15]. При этом с учетом того, что биомасса принимает только положительные значения, интервальная арифметика операций, используемых в модели (5), принимает следующий упрощенный вид [10]:

$$\begin{aligned} [\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] &= [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \\ [\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] &= [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \\ [\underline{a}, \bar{a}] \cdot [\underline{b}, \bar{b}] &= [\underline{ab}, \bar{a}\bar{b}], \end{aligned} \tag{6}$$

$\alpha$ -интервал для функции  $b(t)$  можно представить в следующем виде:  $[b(t)]_\alpha = [\underline{b}_\alpha(t), \bar{b}_\alpha(t)]$ . В работах [16–21] показано, что левые и правые производные от интервальных функций не совпадают. Введем следующие обозначения:  $\underline{b}_\alpha(t) \rightarrow d(t)$ ,  $\bar{b}_\alpha(t) \rightarrow u(t)$  («d – down» and «u – up»). В этих обозначениях  $[b(t)]_\alpha \rightarrow [b(t)] = [d(t), u(t)]$ , где  $[b(t)]$  – интервальная функция.

Согласно [16,19] в расчетах производных в нечетких дифференциальных уравнениях используется разность Хукухары двух нечетких чисел (нечетких интервалов), например,  $[A - B]_\alpha = [\alpha^-_A - \alpha^-_B, \alpha^+_A - \alpha^+_B]$ . При этом результат операции вычитания НЧ должен иметь такие же свойства, что и операнды. По определению разность Хукухара двух НЧ определяется как НЧ  $C = A -_H B$  такое, что из условия существования «C» следует, что  $A = B + C$ . Разность Хукухары называется также H-разность и обозначена как  $A -_H B$ . В результате вычисления разности Хукухары должны получаться числа, имеющие такие же свойства, как и вычитаемые. Например, для многоугольных нечетких чисел необходимо выполнение следующих условий, как для вычитаемых, так и для результата: (1)  $\alpha \in [0, 1]$ ;  $\min \alpha = 0$ ;  $\max \alpha = 1$ ; (2)  $x \in X = [x^-, x^+] \in R$ , где  $X$  – упорядоченное убывающее множество; (3) вектор  $\alpha$ -сечений  $\bar{\alpha} = [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2]$  должен удовлетворять условиям  $\bar{v} = [\alpha_1 = 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 1]$  и  $\bar{v} = [\beta_1 = 1, \beta_2 = \alpha_{n-1}, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_2, \beta_n = 0]$ .

Важной особенностью H-разности является то, что  $A -_H B \neq B -_H A$ , причем возможно, что одна из разностей не имеет перечисленных выше требуемых свойств и, таким образом, не существует. На рис. 3 представлена разность двух многоугольных НЧ. На рис. 3,а представлен случай, когда H-разность существует, а на рис. 3,б – случай, когда H-разность не существует.

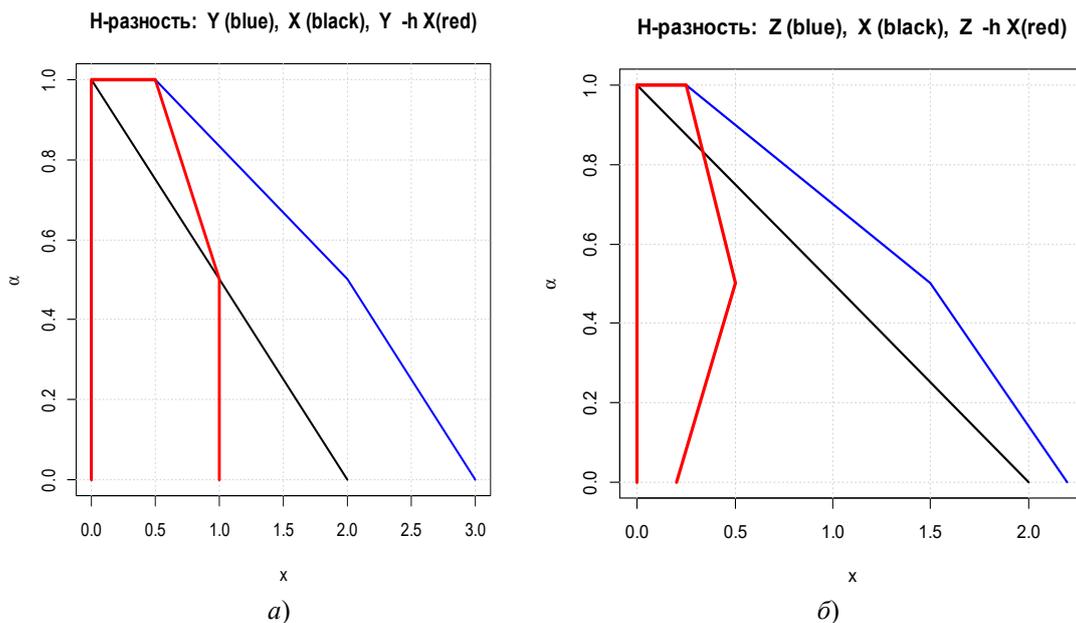


Рис. 3. Иллюстрация двух вариантов H-разности:  
а – H-разность двух НЧ существует; б – H-разность двух НЧ не существует

По определению правая производная в точке  $t_0 \in T$ , где  $T$  – область определения  $b(t)$ , равна

$$[b'(t_0)]_+ = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{[b(t_0 + dt)] - [b(t_0)]}{dt}. \quad (7)$$

Согласно работам [16–21] (7) можно представить в следующем виде:

$$[b'(t_0)]_+ = [d'(t_0), u'(t_0)]. \quad (8)$$

При этом левая производная в точке  $t_0 \in T$  равна

$$[b'(t_0)]_- = \lim_{dt \rightarrow 0^-} \frac{[b(t_0 + dt)] - [b(t_0)]}{dt} = [u'(t_0), d'(t_0)]. \quad (9)$$

Таким образом, нечеткая задача Коши (5) с помощью  $\alpha$ -сечений представима в виде следующих двух интервальных уравнений:

$$[d'(t), u'(t)] = [d - u^2 - eu, u - d^2 - ed], \quad (10)$$

$$[d'(t), u(t)] = [u - d^2 - ed, d - u^2 - eu], \quad (11)$$

где  $eu = \bar{e}$ ,  $ed = \underline{e}$ .

Для сокращения записи введем функцию:  $f(x, y, z) = x - y^2 - z$ , с помощью которой уравнения (10) и (11) принимают следующий вид:

$$[d'(t), u'(t)] = [f(d, u, eu), f(u, d, ed)], \quad (12)$$

$$[d'(t), u(t)] = [f(u, d, ed), f(d, u, eu)]. \quad (13)$$

Интервальное уравнение (12) эквивалентно следующим двум обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДЕ):

$$\begin{aligned} d'(t) &= f(d, u, eu), \\ u'(t) &= f(u, d, ed). \end{aligned} \quad (14)$$

Интервальное уравнение (13) эквивалентно следующим двум ОДЕ:

$$\begin{aligned} d'(t) &= f(u, d, ed), \\ u'(t) &= f(d, u, eu). \end{aligned} \quad (15)$$

Для численного решения систем ОДЕ (14) и (15) используем метод конечных разностей. При этом численная схема, например, схема Рунге – Кутты второго порядка для системы ОДЕ (14) принимает следующий вид:

$$d_{i+1} = d_i + \frac{dt}{2} (f(d_i, u_i, eu) + f(D_i, U_i, eu)), \quad (16)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{dt}{2} (f(u_i, d_i, ed) + f(U_i, D_i, ed)), \quad (17)$$

где  $D_i = d_i + dt \cdot f(d_i, u_i, eu)$ ,  $U_i = u_i + dt \cdot f(u_i, d_i, ed)$ .

Для системы ОДЕ (15) численная схема имеет вид

$$d_{i+1} = d_i + \frac{dt}{2} (f(u_i, d_i, ed) + f(U_i, D_i, ed)), \quad (18)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{dt}{2} (f(d_i, u_i, eu) + f(D_i, U_i, eu)), \tag{19}$$

где  $D_i = d_i + dt \cdot f(u_i, d_i, ed)$ ,  $U_i = u_i + dt \cdot f(d_i, u_i, eu)$ .

Область допустимых решений конечно-разностных уравнений (16)–(19) определяется условиями:  $d_i, u_i \geq 0$ ;  $D_i, U_i \geq 0$ .

### Результаты

В задачах моделирования при не учете виртуальных потоков биомассы динамика лесной биомассы описывается с помощью кривых хода роста древостоя. При этом скорость роста моделируется с помощью коэффициента прироста биомассы –  $G$  (см. (1)). В условиях антропогенной нагрузки модель должна учитывать виртуальные потоки биомассы. При этом объемы лесной биомассы могут регулироваться с помощью управляющих параметров коэффициента прироста биомассы и величины отрицательных виртуальных потоков биомассы. Как отмечено выше, величина этих параметров неизвестна и поэтому может быть описана с помощью нечетких чисел.

Рассмотрим результаты моделирования динамики лесной биомассы с учетом виртуальных потоков в четком приближении (3), которые представлены на рис. 4.

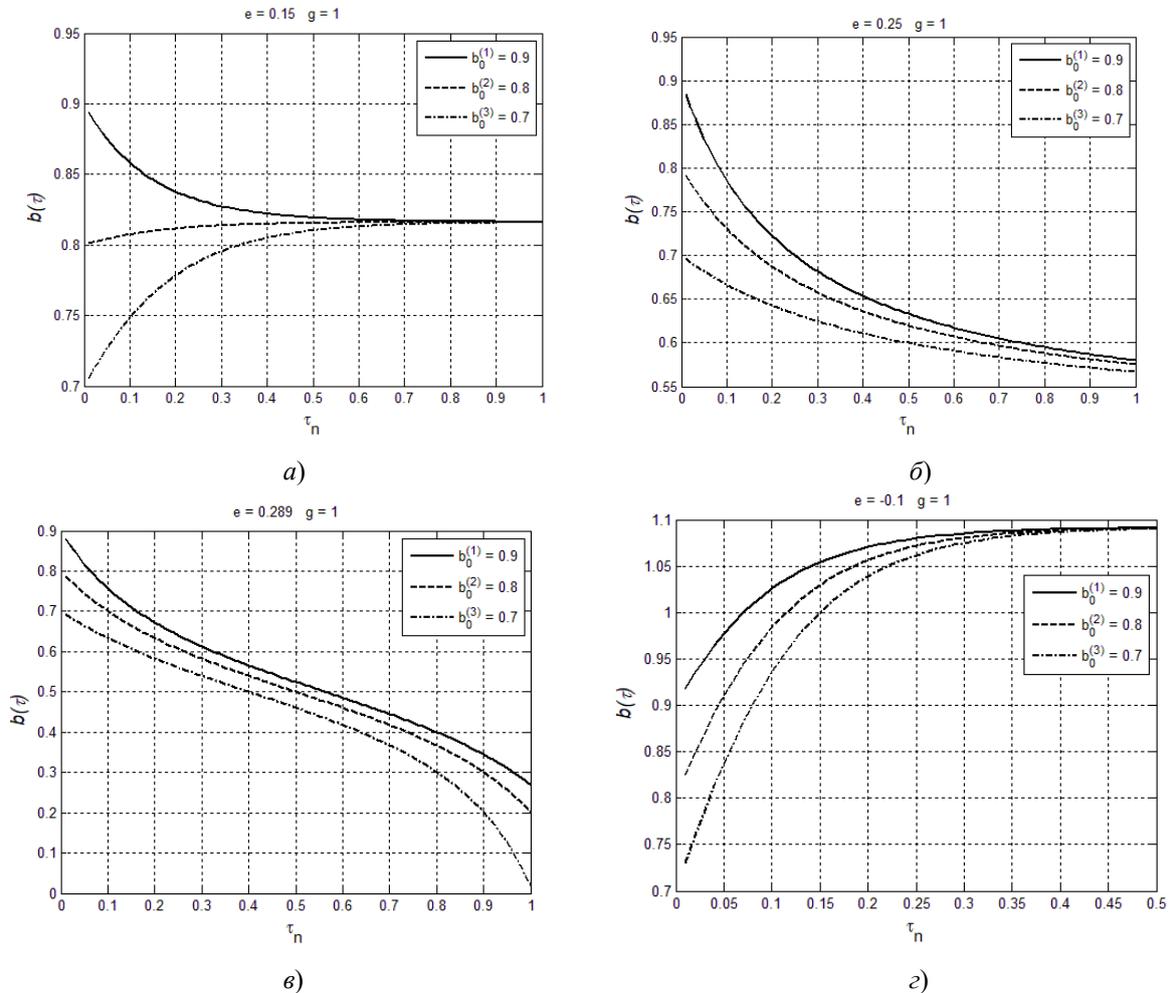


Рис. 4. Результаты моделирования динамики плотности лесной биомассы в четком приближении:  $a - e = 0,15$ ;  $б - e = 0,25$ ;  $в - e = 0,289$ ;  $з - e = -0,1$

На рис. 4,а представлена динамика плотности лесной биомассы при наличии небольших отрицательных потоков ( $e = 0,15$ ). Как следует из рис. 4,а, при этом возможна не только деградация, но и восстановление лесной биомассы из состояния с большой деградацией, т.е. из состояния с малой

плотностью биомассы. На рис. 4,б представлены графики уменьшения биомассы при критической величине отрицательного потока  $e = 0,25$ , при котором аттракторы модели (2) сливаются в одну точку  $a_1 = a_2 = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - 0,25} = 0,5$ , в которую сходятся динамические траектории (см. рис. 4,б). Это соответствует условиям фактического проявления признаков деградации древостоя и является по терминологии [2–7] граничной точкой буферной зоны. При дальнейшем увеличении отрицательного потока величина плотности лесной биомассы становится равной нулю или отрицательной (виртуальный поток уносит всю имеющуюся биомассу). Соответствующие графики представлены на рис. 4,в. Таким образом, отрицательный поток биомассы:  $e = 0,289$  является критическим и соответствует условиям катастрофической деградации древостоя. По терминологии [2–7] катастрофическое состояние древостоя соответствует граничной точке импактной зоны. В случае положительного потока лесная экосистема восстанавливается, причем восстановление возможно до величины плотности биомассы большей, чем при нулевом потоке. Положительные потоки вводятся в модель как отрицательная величина отрицательных потоков. Полученные при этом графики увеличения плотности лесной биомассы представлены на рис. 4,г ( $e = -0,1$ ).

Рассмотрим результаты моделирования с учетом нечетких начальных условий и нечетких отрицательных потоков биомассы. Четкую интервальную динамику можно получить с помощью отдельного четкого моделирования динамики нижней и верхней границы интервала. Обозначим эту модель как «ОА» (Ordinary Arithmetic). Результаты расчета представлены на рис. 5,а. В расчете использовано четкое приближение для виртуального потока  $e = (0,2; 0,2; 0,2)$  и нечеткое приближение для начальной биомассы  $b_0 = (0,5; 0,6; 0,7)$ . Как следует из рис. 5,а, границы интервала асимптотически сходятся к стационарному пределу.

На рис. 4,б показаны результаты ОА-моделирования для нечеткого отрицательного потока биомассы  $e = (0,15; 0,2; 0,25)$ . Как следует из рис. 5,б, границы интервала нечеткости сходятся также асимптотически, но к разным пределам.

Обозначим нечеткую интервальную модель (16), (17) «IA1» (Interval Arithmetic-1) и модель (18), (19) «IA2» (Interval Arithmetic-2). Результаты моделирования с помощью нечеткой модели IA1 показаны на рис. 5,в. Как следует из рис. 5,в, границы интервала нечеткости не имеют асимптот и расходятся в разные стороны, в результате чего ширина интервала неопределенности катастрофически возрастает. Результаты моделирования с помощью нечеткой модели IA2 показаны на рис. 5,г. Очевидно, что границы интервала асимптотически приближаются к своим пределам. Ширина интервала стабилизируется и постепенно приближается к постоянному значению.

## Заключение

1. Для моделирования процессов деградации лесных экосистем под воздействием газовых выбросов промышленных предприятий предложено использовать концепцию виртуальных отрицательных потоков биомассы.
2. В качестве единицы времени для описания процессов деградации лесов в северных широтах предложено использовать не месяцы, а вегетационные периоды.
3. Для моделирования процессов техногенной деградации лесов использовано модернизированное уравнение Ферхюльста с учетом влияния виртуальных отрицательных потоков биомассы.
4. Установлено, что динамика лесной биомассы не критична к малым величинам отрицательного потока, но критична к величине виртуального отрицательного потока биомассы вблизи порога токсического воздействия. Небольшие изменения величины потока вблизи порога токсического воздействия могут привести к существенным изменениям в динамике процессов накопления и деградации лесной биомассы. В результате численных экспериментов установлено, что величина безразмерного отрицательного потока биомассы  $e = 0,25$  приводит к деградации древостоя, при которой появляются явные признаки деградации, что соответствует переходу в буферную зону.
5. Установлено, что безразмерный отрицательный поток биомассы:  $e = 0,289$  является критическим и соответствует условиям катастрофической деградации древостоя, при которой начинаются процессы разрушения лесной экосистемы, что соответствует переходу в импактную зону.
6. Учитывая неопределенный характер параметров моделирования, предложено для моделирования динамики лесной биомассы использовать нечеткое уравнение Ферхюльста с учетом нечетких виртуальных отрицательных потоков биомассы. Нечеткие переменные и параметры модели представлены в виде треугольных нечетких чисел. При этом предложены три модели: моделирова-

ние нечеткой динамики с помощью четкого моделирования отдельно верхней и отдельно нижней границ виртуального интервала нечеткости (модель обозначена как «OA» (Ordinary Arithmetic)); моделирование нечеткой динамики с помощью правосторонней производной (модель обозначена как «IA1» (Interval Arithmetic-1)); моделирование нечеткой динамики с помощью левосторонней производной (модель обозначена как «IA2» (Interval Arithmetic-2)).

7. Модель «OA» удовлетворительно описывает асимптотическую динамику процессов в дровостоях, однако границы интервала могут сходиться к разным пределам. Модель «IA1» не имеет асимптот и границы интервалов расходятся, в результате чего ширина интервалов неопределенности катастрофически возрастает. Модель «IA2» имеет асимптоты, ширина интервала достаточно быстро приближается к стационарному пределу, после которого сохраняет постоянную ширину.

8. Установлено, что для модели «IA1» в результате расходимости границ интервала нечеткости величина конечной нечеткости мало зависит от величины начальной нечеткости виртуального потока.

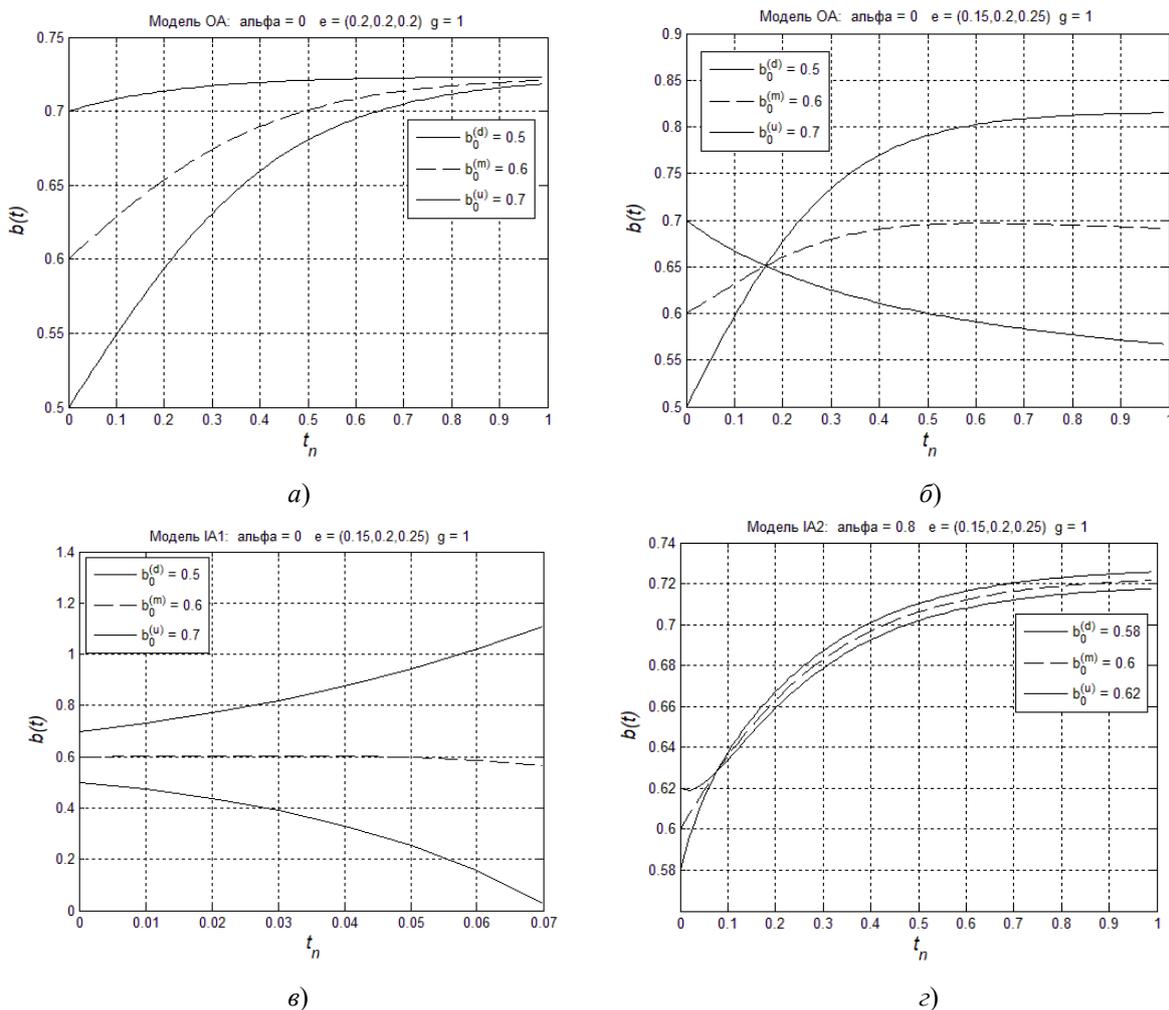


Рис. 5. Динамика границ интервалов нечеткости (неопределенности):  
 а – модель «OA» с четкой величиной отрицательного потока биомассы; б – модель «OA» с нечеткой величиной отрицательного потока биомассы; в – модель «IA1»; з – модель «IA2»

### Библиографический список

1. *Smith, W. H.* Air Pollution and Forests. Interactions between Air Contaminants and Forest Ecosystems / W. H. Smith. – New York : Springer-Verlag, 1981. – 388 p.
2. *Бутусов, О. Б.* Методология эколого-экономической оптимизации химических предприятий и лесных массивов / О. Б. Бутусов, В. П. Мешалкин, Л. Пийгянер, Б. Е. Сельский // Химическая промышленность. – 1995. – № 10. – С. 622–629.

3. Бутусов, О. Б. Нормирование газовых выбросов химических предприятий. Новая концепция / О. Б. Бутусов, В. П. Мешалкин, Б. Е. Сельский, А. М. Степанов // Экология и промышленность России. – 1998. – № 2. – С. 29–32.
4. Бутусов, О. Б. Новая модель доза-эффект динамики лесных экосистем в районе металлургических предприятий / О. Б. Бутусов, А. М. Степанов // Экология и промышленность России. – 2001. – № 6. – С. 37–40.
5. Бутусов, О. Б. Математическое моделирование загрязнения лесов выбросами металлургического комбината «Печенганикель» / О. Б. Бутусов, В. П. Мешалкин // Известия вузов: химия и химические технологии. – 2004. – Т. 47, вып. 9. – С. 85–92.
6. Бутусов, О. Б. Нечеткое экологическое зонирование лесов в районе промышленных источников химического загрязнения / О. Б. Бутусов, О. Ю. Савельева, Н. И. Редикульцева // Исследование Земли из космоса. – 2008. – № 1. – С. 73–81.
7. Леонтьев, Л. И. Комплексная оценка воздействия металлургического комбината на лесные массивы / Л. И. Леонтьев, О. Б. Бутусов, В. П. Мешалкин // Все материалы. Энциклопедический справочник. – 2009. – № 5. – С. 38–44.
8. Коровин, Г. Н. Долгосрочное прогнозирование динамики породно-возрастной структуры и ресурсного потенциала лесов / Г. Н. Коровин, М. Д. Корзухин, О. Б. Бутусов, А. С. Голованов // Разнообразие и динамика лесных экосистем России : в 2 кн. / под ред. А. С. Исаев. – Москва : Товарищество научных изданий КМК, 2012. – Кн. 1. – С. 25–95.
9. Salerno, F. Energy, Forest, and Indoor Air Pollution Models for Sagarmatha National Park and Buffer Zone, Nepal / F. Salerno, G. Viviano, S. Thakuri et. al. // Mountain Research and Development (MRD). – 2010. – Vol. 30, № 2. – P. 113–126. – URL: <http://dx.doi.org/10.1659/MRD-JOURNAL-D-10-00027.1>
10. Бутусов, О. Б. Математическое моделирование экологических процессов и систем в среде Матлаб / О. Б. Бутусов, Н. И. Редикульцева. – Москва : МГУИЭ, 2006. – 176 с.
11. Штовба, С. Д. Проектирование нечетких систем средствами Матлаб / С. Д. Штовба. – Москва : Горячая линия – Телеком, 2009. – 288 с.
12. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде Матлаб и Фазитех / А. В. Леоненков. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.
13. Круглов, В. В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети / В. В. Круглов, М. И. Дли, Р. Ю. Голунов. – Москва : Физматлит, 2001. – 224 с.
14. Коньшева, Л. К. Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие / Л. К. Коньшева, Д. М. Назаров. – Санкт-Петербург : Питер, 2011. – 192 с.
15. Lee, K. H. First Course on Fuzzy Theory and Applications / K. H. Lee. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 2005. – 341 p.
16. Lakshmikantham, V. Theory of fuzzy differential equations and inclusions / V. Lakshmikantham, R. N. Mohapatra. – London ; New York : Taylor&Francis Group, 2003. – 182 p.
17. Hullermeier, Eyke. Numerical methods for fuzzy initial value problem / Eyke Hullermeier // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. – 1999. – Vol. 7, № 5. – P. 439–461.
18. Muhammad, Zaini Ahmad. Numerical Methods for Fuzzy Initial Value Problems under Different Types of Interpretation: A Comparison Study / Zaini Ahmad Muhammad, Khatim Hasan Mohammad // Proceedings of International Conference on Informatics Engineering and Information Science, Part II (ICIEIS 2011, Kuala Lumpur, Malaysia, November 12–14, 2011). – Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2011. – Vol. CCIS 252. – P. 275–288.
19. Kanagarajan, K. Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability by Modified Euler method / K. Kanagarajan, R. Suresh // International Journal of Mathematical Engineering and Science. – 2013. – Vol. 2, № 11. – P. 5–15.
20. Kumaresan, N. Simulink Approach to Solve Fuzzy Differential Equation under Generalized Differentiability / N. Kumaresan, J. Kavikumar, Ratnavelu Kuru // International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering. – 2012. – Vol. 6, № 4. – P. 453–456.
21. Amarti, Z. Numerical solution of a logistic growth model for a population with Allee effect considering fuzzy initial values and fuzzy parameters / Z. Amarti, N. S. Nurkholipah, N. Anggriani, A. K. Supriatna // IOP (Institute of Physics) Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 332. – P. 1–9. – DOI 10.1088/1757-899X/332/1/012051.

## References

1. Smith W. H. *Air Pollution and Forests. Interactions between Air Contaminants and Forest Ecosystems*. New York: Springer-Verlag, 1981, 388 p.
2. Butusov O. B., Meshalkin V. P., Piygyaner L., Sel'skiy B. E. *Khimicheskaya promyshlennost'* [Chemical industry]. 1995, no. 10, pp. 622–629. [In Russian]
3. Butusov O. B., Meshalkin V. P., Sel'skiy B. E., Stepanov A. M. *Ekologiya i promyshlennost' Rossii* [Ecology and industry in Russia]. 1998, no. 2, pp. 29–32. [In Russian]
4. Butusov O. B., Stepanov A. M. *Ekologiya i promyshlennost' Rossii* [Ecology and industry in Russia]. 2001, no. 6, pp. 37–40. [In Russian]

5. Butusov O. B., Meshalkin V. P. *Izvestiya vuzov: khimiya i khimicheskie tekhnologii* [Proceedings of the universities: chemistry and chemical technology]. 2004, vol. 47, iss. 9, pp. 85–92. [In Russian]
6. Butusov O. B., Savel'eva O. Yu., Redikul'tseva N. I. *Issledovanie Zemli iz kosmosa* [Earth exploration from space]. 2008, no. 1, pp. 73–81. [In Russian]
7. Leont'ev L. I., Butusov O. B., Meshalkin V. P. *Vse materialy. Entsiklopedicheskiy spravochnik* [All material. Encyclopedic reference book]. 2009, no. 5, pp. 38–44. [In Russian]
8. Korovin G. N., Korzukhin M. D., Butusov O. B., Golovanov A. S. *Raznoobrazie i dinamika lesnykh ekosistem Rossii: v 2 kn.* [The diversity and dynamics of forest ecosystems of Russia : in 2 books]. Moscow: Tovari-schestvo nauchnykh izdaniy KMK, 2012, bk. 1, pp. 25–95. [In Russian]
9. Salerno F., Viviano G., Thakuri S. et. al. *Mountain Research and Development (MRD)*. 2010, vol. 30, no. 2, pp. 113–126. Available at: <http://dx.doi.org/10.1659/MRD-JOURNAL-D-10-00027.1>
10. Butusov O. B., Redikul'tseva N. I. *Matematicheskoe modelirovanie ekologicheskikh protsessov i sistem v srede Matlab* [Mathematical modeling of environmental processes and systems in the Matlab environment]. Moscow: MGUIE, 2006, 176 p. [In Russian]
11. Shtovba S. D. *Proektirovanie nechetkikh sistem sredstvami Matlab* [Design of fuzzy systems by means of Matlab]. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2009, 288 p. [In Russian]
12. Leonenkov A. V. *Nechetkoe modelirovanie v srede Matlab i Fazitekhn* [Fuzzy modeling in an environment Matlab and Fazitekhn]. Saint-Petersburg: BKhV-Peterburg, 2003, 736 p. [In Russian]
13. Kruglov V. V., Dli M. I., Golunov R. Yu. *Nechetskaya logika i iskusstvennyye neyronnye seti* [Fuzzy logic and artificial neural networks]. Moscow: Fizmatlit, 2001, 224 p. [In Russian]
14. Konysheva L. K., Nazarov D. M. *Osnovy teorii nechetkikh mnozhestv: ucheb. posobie* [Fundamentals of the theory of fuzzy sets : a training manual]. Saint-Petersburg: Piter, 2011, 192 p. [In Russian]
15. Lee K. H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2005, 341 p.
16. Lakshmikantham V., Mohapatra R. N. *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*. London; New York: Taylor&Francis Group, 2003, 182 p.
17. Hullermeier Eyke. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. 1999, vol. 7, no. 5, pp. 439–461.
18. Muhammad Zaini Ahmad, Mohammad Khatim Hasan *Proceedings of International Conference on Informatics Engineering and Information Science, Part II (ICIEIS 2011, Kuala Lumpur, Malaysia, November 12–14, 2011)*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011, vol. CCIS 252, pp. 275–288.
19. Kanagarajan K., Suresh R. *International Journal of Mathematical Engineering and Science*. 2013, vol. 2, no. 11, pp. 5–15.
20. Kumaresan N., Kavikumar J., Ratnavelu Kuru *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*. 2012, vol. 6, no. 4, pp. 453–456.
21. Amarti Z., Nurkholipah N. S., Anggriani N., Supriatna A. K. *IOP (Institute of Physics) Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018, vol. 332, pp. 1–9. DOI 10.1088/1757-899X/332/1/012051.

**Бутусов Олег Борисович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
кафедра математики,  
Московский политехнический университет  
(107023, Россия, г. Москва, ул. Б. Семеновская, 38)  
E-mail: butusov-1@mail.ru

**Дикусар Василий Васильевич**

доктор физико-математических наук, профессор,  
кафедра высшей математики,  
Московский физико-технический институт  
(141701, Россия, г. Долгопрудный,  
Институтский пер., 9)  
E-mail: dikussar@yandex.ru

**Редикутьцева Нина Ивановна**

кандидат технических наук, доцент,  
кафедра прикладной математики,  
Московский гуманитарный университет  
(111395, Россия, г. Москва, ул. Юности, 5)  
E-mail: redik\_ni@mail.ru

**Butusov Oleg Borisovich**

doctor of physical and mathematical sciences, professor,  
sub-department of mathematics,  
Moscow Polytechnic University  
(107023, 38 B. Semenovskaya street, Moscow, Russia)

**Dikusar Vasily Vasilevich**

doctor of physical and mathematical sciences, professor,  
sub-department of higher mathematics,  
Moscow Institute of Physics and Technology  
(141701, 9 Institutsky lane, Dolgoprudny, Russia)

**Redikul'tseva Nina Ivanovna**

candidate of technical sciences, associate professor,  
sub-department of applied mathematics,  
Moscow Humanitarian University  
(111395, 5 Yunosty street, Moscow, Russia)

**Образец цитирования:**

Бутусов, О. Б. Нечеткие дифференциальные модели и их применение для математического моделирования сложных экологических систем / О. Б. Бутусов, В. В. Дикусар, Н. И. Редикульцева // Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 4 (28). – С. 14–25. – DOI 10.21685/2307-4205-2019-4-2.